Révisions & Oraux ; Série N°9

Exercice 1 Déterminer les développements limités à l'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$ et $x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 2 Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-b)(P'+P'(b)) - 2(P-P(b))$ où $b \in \mathbb{R}$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que b est racine de $\Phi(P)$. Déterminer sa multiplicité si $\Phi(P)$ est non nul.
2. Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 3 [CCP MP] Soit $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 Soit $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. CNS pour que $A = \left(\alpha^{|i-j|}\right)$ soit inversible.

Exercice 5 [Mines MP 2024] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > 1$. **Ind** : *Raisonner par l'absurde.*
2. Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

Exercice 6 [Mines 2023] 1. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $\forall k \geq 2,\ p_1 \dots p_k \geq p_{k+1} + 1$.

2. Soit $n > 6$. Montrer qu'il existe un couple $(a,b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2$ tel que $a+b=n$ et $a \wedge b = 1$.
   Indication : *À quelle condition suffisante (et nécessaire) simple sur* d *a-t-on* $d \wedge (n-d) = 1$ *?*
3. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.

Exercice 7 [Mines MP 2024] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer $\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit P un polynôme réel de degré 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

1. On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires délimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P sont égales.
2. On pose $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrer que : $\frac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \frac{7}{2}q^5$.

Exercice 9 [ENS MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des parties de la forme $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ avec $a_1 \leq b_1$,…, $a_n \leq b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G,\ F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists G \subset \mathbb{R}^n,\ |G| = k,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.

Révisions & Oraux ; Série N°9

Exercice 1 Déterminer les développements limités à l'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$ et $x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 2 Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-b)(P'+P'(b)) - 2(P-P(b))$ où $b \in \mathbb{R}$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que b est racine de $\Phi(P)$. Déterminer sa multiplicité si $\Phi(P)$ est non nul.
2. Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 3 [CCP MP] Soit $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 Soit $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. CNS pour que $A = \left(\alpha^{|i-j|}\right)$ soit inversible.

Exercice 5 [Mines MP 2024] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > 1$. **Ind** : *Raisonner par l'absurde.*
2. Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

Exercice 6 [Mines 2023] 1. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $\forall k \geq 2,\ p_1 \dots p_k \geq p_{k+1} + 1$.

2. Soit $n > 6$. Montrer qu'il existe un couple $(a,b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2$ tel que $a+b=n$ et $a \wedge b = 1$.
   Indication : *À quelle condition suffisante (et nécessaire) simple sur* d *a-t-on* $d \wedge (n-d) = 1$ *?*
3. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.

Exercice 7 [Mines MP 2024] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer $\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit P un polynôme réel de degré 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

1. On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires délimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P sont égales.
2. On pose $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrer que : $\frac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \frac{7}{2}q^5$.

Exercice 9 [ENS MP 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des parties de la forme $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ avec $a_1 \leq b_1$,…, $a_n \leq b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G,\ F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists G \subset \mathbb{R}^n,\ |G| = k,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.